

NOM :

Prénom :

Rouge entourez l'épreuve

entourez le Jury

A B C D E F

Sujet choisi : Legon 18.1 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Autre sujet :

Dans la suite, $E = \mathbb{R}^n$, et E est un espace affine sur E .

I) Barycentres.

1) Définitions et premières propriétés

Def 1: Un point pondéré est un couple (A, d) avec $A \in E$ et $d \in \mathbb{R}$. On note $A(d)$.

Def 2: Un système de points pondérés $A_1(d_1), \dots, A_k(d_k)$ est la donnée de n points pondérés.

Def 3: Soient $d_1, \dots, d_k$ tq $\sum_{i=1}^k d_i \neq 0$. Le barycentre du système de points pondérés $A_1(d_1), \dots, A_k(d_k)$ est l'unique $G \in E$ tq:

$$\sum_{i=1}^k d_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

G est aussi défini par:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^k d_i} \sum_{i=1}^k d_i \overrightarrow{OA_i} \text{ où } O \in E \text{ quelconque.}$$

Rq 4: L'indép du choix de O nous permet d'écrire: $G = \frac{1}{\sum_{i=1}^k d_i} \sum_{i=1}^k d_i A_i$.

Notation 5: On note $\text{Bar}((A_i, d_i)_{1 \leq i \leq k})$.

Prop 6: 1) $\forall d_i \in \mathbb{R}^*$, $\text{Bar}((A_i, d_i)_{1 \leq i \leq k}) = \text{Bar}((A_i, |d_i|)_{1 \leq i \leq k})$ (homogénéité des coeff).

2) $\forall \sigma \in S_k$, $\text{Bar}((A_i, d_i)_{1 \leq i \leq k}) = \text{Bar}((A_{\sigma(i)}, d_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq k})$ (commutativité).

3) $\forall J \subset \{1, \dots, k\}$, $\text{Bar}((A_i, d_i)_{1 \leq i \leq k}) = \text{Bar}((A_i, d_i)_{i \in J}, \text{Bar}((A_i, d_i)_{i \in J^c}))$ (associativité).

Def 7: L'isobarycentre de $A_1, \dots, A_k \in E$ est le barycentre de ces k points affectés de coeff tous égaux entre eux, noté $\text{Isob}(A_1, \dots, A_k)$.

Ex 8: Le milieu d'un segment $[A, B]$ est l'isobarycentre de $(A, \frac{1}{2}), (B, \frac{1}{2})$.

Ex 9: $\text{Isob}(A, B, C)$ est appelé centre de gravité du triangle ABC .

Ex 10: L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme coïncide avec les milieux des diagonales.

Thm 11: Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, \dots, z_m\}$. On définit une suite $(P_k)_k$ par $P_0 = P$ et P_{k+1} est un polygone dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_k . Alors: $P_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{Isob}(z_1, \dots, z_m)$.

2) Lien avec les espaces et fonctions affines

Def 12: $F \subset E$ est un sous-espace affine de E si $F \neq \emptyset$ et si F possède une structure d'espace affine de direction un s.e.a F de E . On note s.e.a.

Prop 13: Le s.e.a engendré par $A \subset E, A \neq \emptyset$ est: $\text{Aff}(A) = \bigcap_{F \text{ s.e.a et } A \subset F} F = \min\{F \mid F \text{ s.e.a et } A \subset F\}$.

Thm 14: $\text{Aff}(A)$ est l'ensemble des barycentres des points de A .

Ex 15: La droite (AB) est égale à l'ensemble de tous les barycentres des points A et B .

Thm 16: $F \subset E, F \neq \emptyset$ est un s.e.a si elle est stable par barycentration.

Prop 16.2: F espace affine. $f: E \rightarrow F$ est affine si elle conserve les barycentres.

3) Coordonnées barycentriques

Def 17: $X = \{A_1, \dots, A_k\} \subset E^k$ est dite affinement libre si pour tout $\Pi \in \text{Aff}(X)$, il existe un seul k -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tq $\sum \lambda_i = 1$ et $\Pi = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k})$.

D1

Rq 18: Dans le cas contraire, on dit que X est affinement liée.

Def 19: X est affinement génératrice si $\text{Aff}(X) = E$.

Def 20: X est un repère affine de E si X est affinement libre et génératrice.

Def 21: Soit $X = \{A_1, \dots, A_n\}$ repère affine de E . Alors pour $M \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ uniques tq $\sum \lambda_i = 1$ et $M = \text{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n})$. Les $(\lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ sont appelés les coordonnées barycentriques de M dans X .

Ex 22: Les coordonnées barycentriques du centre de gravité d'un triangle ABC dans le repère affine (A, B, C) du plan sont $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

II) Convexité

1) Ensembles convexes et lien avec les fonctions convexes.

Def 23: L'ensemble $[AB] = \{M \in E \mid \exists t \in [0, 1], \vec{AM} = t\vec{AB}\}$ pour $A, B \in E$ est appelé segment d'extrémités A et B .

Prop 24: $[AB] = \{(1-t)A + tB, t \in [0, 1]\}$.

Def 25: $C \subseteq E$ est dit convexe ssi pour tout $A, B \in E$, on a $[A, B] \subset C$.

Ex 26: Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Ex 27: Les sous-espaces et les boules de E sont convexes.

Prop 28: Les convexes sont convexes par arcs.

Désormais, C sera un convexe.

Def 29: On dit que $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si: $\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Thm 30 (Inégalité de Jensen): Soient $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $x_1, \dots, x_n \in C$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Alors: $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

~~App 31 (Inégalité arithmétique - géométrique)~~

~~Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$.~~

Rq 32: L'inégalité de Jensen peut être vue comme "l'image du barycentre est plus petite que le barycentre des images".

Def 33: On appelle épigraphe de f la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ définie par: $E(f) = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$.

Prop 34: $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi $E(f)$ l'est.

2) Enveloppe convexe.

Prop 35: L'intersection de parties convexes est encore convexe.

Def 36: Si $A \subset E, A \neq \emptyset$, on appelle enveloppe convexe de A , et on note $\text{conv}(A)$:

$$\text{conv}(A) = \bigcap_{C \text{ convexe}, A \subset C} C.$$

Rq 37: C est le plus petit convexe contenant A .

Ex 38: $\text{Conv}(\{A, B\}) = [AB]$

Ex 39: $\text{Conv}(\{A, B, C\}) = \text{triangle } ABC$.

Prop 40: $\text{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A .

Cor 41: $C \subseteq E$ est convexe ssi C est stable par barycentration à coefficients positifs.

Rq 42: On dit aussi dans ce cas que C est stable par combinaison convexe.

Thm 43 (Gauss-Lucas): Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Toute racine de P' est contenue dans l'enveloppe convexe des racines de P .

App 44: 7 est le plus grand entier $n \geq 2$ tq les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1.

Thm 45 (Carathéodory): Si $\dim(E) = m \in \mathbb{N}^*$ et $A \subseteq E$, tout élément de $\text{Conv}(A)$ s'écrit comme barycentre à coefficients positifs d'au plus $m+1$ points de A .

Ex 46: Dans $\mathbb{R}^2$, tout point à l'intérieur d'un triangle s'écrit comme barycentre des sommets de celui-ci.

Cor 47: Si A est compact, alors $\text{Conv}(A)$ aussi.

Thm 48: Soit $\|\cdot\|_2$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{R})$. Alors:
 $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = B := \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|M\| \leq 1\}$.

3) Points extrémaux d'une partie convexe

Def 49: $C \subseteq E$ convexe. On dit que $\pi \in C$ est un point extrémal de C si:

$\forall A, B \in C, \pi \in [AB] \Rightarrow \pi = A \text{ ou } \pi = B$.

Ex 50: Dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ l'ensemble des points extrémaux de la boule unité est la sphère unité.

Ex 51: L'ensemble des points extrémaux de B est $O_n(\mathbb{R})$.

Prop 52: Soit $C \subseteq E$ convexe et $\pi \in C$. L'ASSE:

1) π est un point extrémal de C .

2) $A \setminus \{\pi\}$ est convexe.

3) Si $\pi = \text{Bar}(\{A_i, \lambda_i\}_{i=1}^k)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, alors $\pi = A_{i_0}$ pour un $i_0 \in \{1, \dots, k\}$.

Ex 53: Les points extrémaux d'un polygone convexe sont ses sommets.

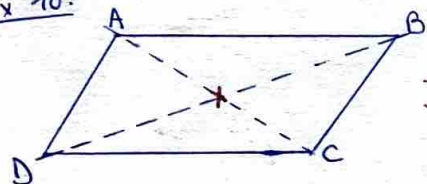
Rq 54: Le résultat est faux sans l'hypothèse de convexité (cf annexe).

Thm 55 (Krein-Milman, admis): Si $C \subseteq E$ est convexe, compact et non vide, alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Rq 56: On retrouve le résultat de l'ex 51.

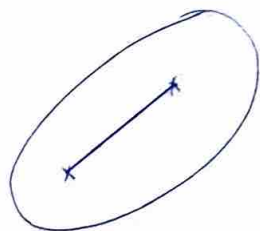
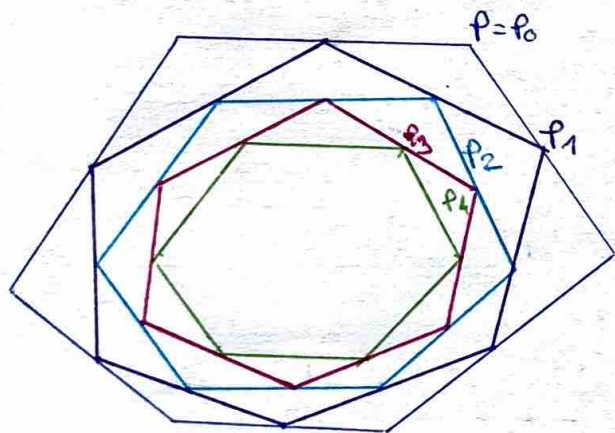
Annexe :

Ex 10:

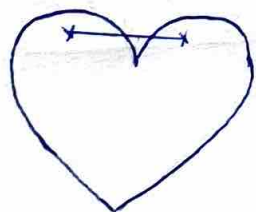


$$I = I_{\text{rob}}(A, B, C, D)$$

Thm 11:

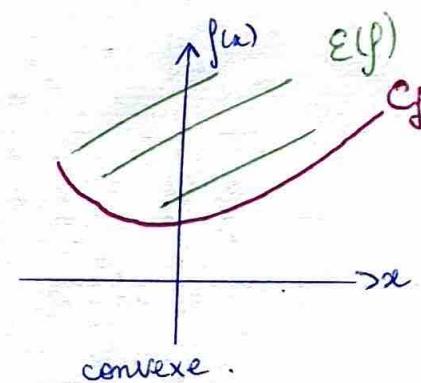
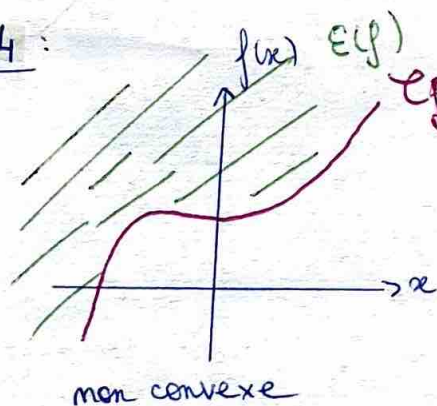


convexe

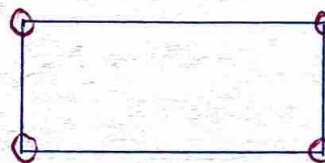


non convexe

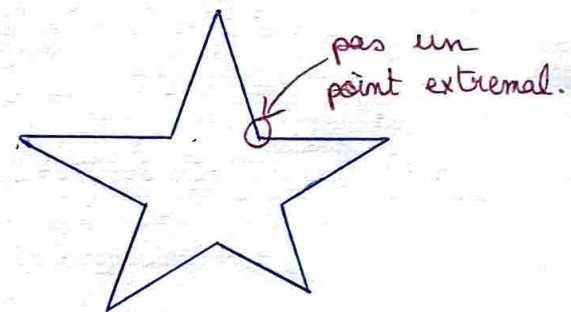
Prop 34:



Ex 53:

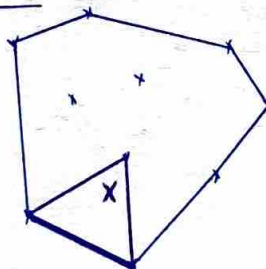


O: points extrémaux
(polygone convexe)



(polygone non convexe)

Ex 46:



[D1: Isenmann
D2: Queffelec (analyse agreg) + Objectif Agreg.
Références: Mercier, Fondamentaux de géométrie pour les concours I) 1) 2) 3) II) 1)

Combes, Algèbre et géométrie I) 1) 3) II) 1)

Tauvel, Géométrie II) 2) 3)

Rombaldi, Analyse réelle II) 1)